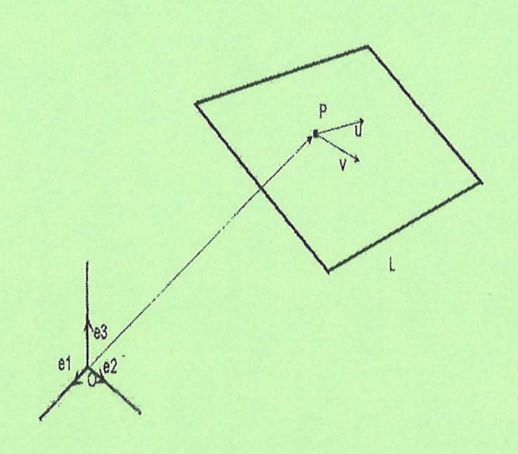
ESPACIO AFÍN.
APLICACIONES AFINES

por

EUGENIA ROSADO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-65-01

ESPACIO AFÍN.
APLICACIONES AFINES

por

EUGENIA ROSADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-65-01

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

I ***Espacio afin. Aplicaciones afines***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestiòn y portada : Nadia Soddu.
CUADERNO 300.01 / 3-65-01
ISBN: 978-84-9728-326-57(obra completa)
ISBN-13: 978-84-9728-327-4
Depósito Legal: M- 7204-2010

Esta serie de cuatro cuadernillos:

- Espacio afín. Aplicaciones afines
- Espacio afín euclídeo. Isometrías
- Espacio proyectivo real. Cónicas
- Haces de cónicas. Cuádricas

es el resultado de varios años de docencia en Geometría afín y Proyectiva, materia que forma parte de la asignatura de Matemáticas II de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.

Con estos apuntes he querido ofrecer al alumno un complemento teórico y práctico a la docencia desarrollada en el aula y se ha pretendido que resulten de la mayor utilidad posible. Los cuatro cuadernillos que constituyen esta serie tienen una estructura homogénea. En cada tema se desarrolla la teoría incluyendo las demostraciones de los resultados que se han considerado más relevantes. Intercalados con la teoría hay diversos ejemplos y al final de cada tema se han incluidoalgunos ejercicios resueltos. En algunos de los ejemplos o ejercicios se han incluido los comandos del programa de cálculo simbólico MAPLE necesarios para resolver el ejercicio utilizando dicho programa.

Quiero agradecer a todos los alumnos y profesores que me han hecho llegar sugerencias y críticas a las versiones preliminares de estos apuntes así como a todos aquellos que me las hagan llegar en el futuro.

Índice

1 Espacio afín

1.1 Definición de Espacio afín

Un *espacio afín real* es una terna $(\mathbb{A}, V, \phi)$ formada por un conjunto $\mathbb{A}$, un espacio vectorial real V y una aplicación $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$ que cumple:

1. $\forall P \in \mathbb{A}$ y $\forall \vec{u} \in V$ existe un único $Q \in \mathbb{A}$ tal que
$$\phi(P, Q) = \vec{u}.$$

2. $\phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R)$ para todo $P, Q, R \in \mathbb{A}$.

Notación. Escribiremos $\phi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$. A los elementos del conjunto $\mathbb{A}$ los llamamos *puntos* de $\mathbb{A}$ y diremos que V es el espacio vectorial asociado al espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$. Definimos la *dimensión del espacio afín* $(\mathbb{A}, V, \phi)$ como
$$\dim \mathbb{A} = \dim V.$$

Ejemplo 1 Todo espacio vectorial V es un espacio afín con espacio vectorial asociado V. En efecto, la terna $(\mathbb{A}, V, \phi)$ donde $\mathbb{A} = V$ y la aplicación ϕ dada por:
$$\phi\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V, \quad \phi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u},$$
verifica las condiciones de la definición de espacio afín.

Ejemplo 2 Por el ejemplo anterior tenemos que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \phi)$ es un espacio afín de dimensión 2, $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \phi)$ es un espacio afín de dimensión 3. En general $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \phi)$ es un espacio afín de dimensión n.

1.1.1 Propiedades de los espacios afines

Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real. Se verifica:

1. $\phi(P, Q) = \vec{0}$ si y sólo si $P = Q$.
2. $\phi(P, Q) = -\phi(Q, P)$, $\forall P, Q \in \mathbb{A}$.
3. $\phi(P, Q) = \phi(R, S)$ si y sólo si $\phi(P, R) = \phi(Q, S)$.

1.2 Referencia afín

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimension n con espacio vectorial asociado V.

Definición de referencia afín Un conjunto de $n+1$ puntos $\{P_0; P_1, \ldots, P_n\}$ de un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ es un *sistema de referencia afín* de $\mathbb{A}$ si el conjunto de vectores $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ es una base del espacio vectorial V.

Definición El punto $P_0 \in \mathbb{A}$ tal que $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ es una base de V, se denomina *origen* del sistema de referencia $\{P_0; P_1, \ldots, P_n\}$.

Proposición Dado un punto $P_0 \in \mathbb{A}$ existe un sistema de referencia afín de $\mathbb{A}$ con origen el punto P_0.

Demostración Por el teorema de la base sabemos que todo espacio vectorial finitamente generado admite al menos una base. Sea $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Sean P_i los puntos de $\mathbb{A}$ tales que $\overrightarrow{P_0P_i} = \vec{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$. El conjunto de puntos $\{P_0; P_1, \ldots, P_n\}$ de $\mathbb{A}$ es un sistema de referencia afín de $\mathbb{A}$.

Corolario Dado un punto $O \in \mathbb{A}$ y una base B de V, tenemos una referencia afín de $\mathbb{A}$, que también se denomina *referencia cartesiana* y se denota $\mathcal{R} = \{O; B\}$.

Definición de coordenadas Se llaman *coordenadas* de un punto $P \in \mathbb{A}$ respecto a una referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B\}$ del espacio afín $\mathbb{A}$ a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base B del espacio vectorial V; esto es, a la n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

donde $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ son los vectores de la base B. Escribiremos: $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{R}}$.

Ejemplo Sea $\mathcal{R} = \{O; B\}$ un sistema de referencia afín de un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ de dimensión 3. Consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$ con $O'(1, 2, -1)_R$ y $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, donde

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0)_B, \quad \vec{u}_2 = (1, 1, 0)_B, \quad \vec{u}_3 = (1, 1, 1)_B$$

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ forman una base de V pues al ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

el sistema de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es linealmente independiente (y como sabemos un sistema linealmente independiente formado por 3 vectores en un espacio vectorial V de dimensión 3 es una base).

Sea el punto P cuyas coordenadas respecto a la referencia $\mathcal{R}$ son $(5,5,0)$, esto es,

$$P(5,5,0)_{\mathcal{R}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = 5\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3.$$

Vamos a calcular las coordenadas de P respecto de $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= (5-1, 5-2, 0+1) = (4,3,1), \\ \overrightarrow{O'P} &= x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = x_1(1,0,0) + x_2(1,1,0) + x_3(1,1,1) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 3 = x_2 + x_3 \\ 1 = x_3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array} \right.$$

y por tanto, $(1,2,1)$ son las coordenadas de P respecto de $\mathcal{R}'$: $P(1,2,1)_{\mathcal{R}'}$.

1.2.1 Ecuaciones del cambio de referencia afín

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimension n con espacio vectorial asociado V y sean $\mathcal{R} = \{O; B = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)\}$, $\mathcal{R}' = \{O'; B' = (\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_n)\}$ dos sistemas de referencia afines de $\mathbb{A}$.

Se considera $P \in \mathbb{A}$ tal que $P(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ y $P(y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{R}'}$; esto es,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n \\ \text{y } \overrightarrow{O'P} &= y_1\vec{u}'_1 + \cdots + y_n\vec{u}'_n. \end{aligned}$$

¿Qué relación hay entre $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n)$?

Sabemos que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Sean $(a_1, \ldots, a_n)$ las coordenadas de O' respecto de $\mathcal{R}$; esto es,

$$\overrightarrow{OO'} = a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n,$$

y sean $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ las coordenadas del vector $\vec{u}'_i$ respecto de la base B; esto es,

$$\vec{u}'_i = a_{1i}\vec{u}_1 + \cdots + a_{ni}\vec{u}_n.$$

Sustituyendo lo anterior en $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \\
&= a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n + (y_1\vec{u}'_1 + \cdots + y_n\vec{u}'_n) \\
&= a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n + y_1(a_{11}\vec{u}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{u}_n) \\
&\qquad\qquad + \cdots + y_n(a_{1n}\vec{u}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{u}_n) \\
&= (a_1 + y_1a_{11} + \cdots + y_na_{1n})\vec{u}_1 \\
&\quad + \cdots + (a_n + y_1a_{n1} + \cdots + y_na_{nn})\vec{u}_n
\end{aligned}$$

y como $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n$, igualando coeficientes, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + y_1a_{11} + \cdots + y_na_{1n} \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n + y_1a_{n1} + \cdots + y_na_{nn} \end{cases}$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones anterior se escribe:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

También se puede escibir como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M_{B'B} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz $M_{B'B}$ es la matriz del cambio de base de B' a B:

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz

$$M_{R'R} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{a} & M_{B'B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es la *matriz de cambio de referencia de* $\mathcal{R}'$ *a* $\mathcal{R}$.

Ejemplo En el espacio afín $(\mathbb{A}_2, V_2, \phi)$ se consideran las referencias $\mathcal{R} = \{O; B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)\}$, $\mathcal{R}' = \{O'; B' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)\}$ siendo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} &= 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2, \\ \vec{u}'_1 &= 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \\ \vec{u}'_2 &= -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2. \end{aligned}$$

Se pide:

1. Determinar la matriz del cambio de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

   Tenemos

   $$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + y_1(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + y_2(-\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) \\ &= (3 + 2y_1 - y_2)\,\vec{u}_1 + (3 - y_1 + 2y_2)\,\vec{u}_2 \end{aligned}$$

   Luego

   $$\begin{cases} x_1 = 3 + 2y_1 - y_2 \\ x_2 = 3 - y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

   esto es,

   $$M_{R'R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Determinar la matriz del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

   $$M_{RR'} = M_{R'R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Si $(3, 5)$ son las coordenadas de un punto P en la referencia $\mathcal{R}$, determinar los coordenadas de P en $\mathcal{R}'$.

   $$M_{RR'} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4. Si $(2, 3)$ son las cooordenadas de un punto Q en la referencia $\mathcal{R}'$, determinar los coordenadas de Q en $\mathcal{R}$.

   $$M_{R'R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

MAPLE

```
>restart:  with(linalg):
>MRpR:=concat([1,3,3],[0,2,-1],[0,-1,2]);
>MRRp:=inverse(MRpR);
>evalm(MRRp&*[1,3,5]);
>evalm(MRpR&*[1,2,3]);
```

1.3 Subespacio afín

Definición de subespacio afín Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real. Un subconjunto $L \subset \mathbb{A}$ es un *subespacio afín* de $\mathbb{A}$ si fijado un punto $P \in L$ el conjunto

$$W(L) = \{\overline{PQ} \mid Q \in L\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Si $L \subset \mathbb{A}$ es un subespacio afín, el subespacio vectorial $W(L)$ que cumple lo anterior se denomina *subespacio vectorial asociado a* L y se denota $\vec{L}$.

Proposición La definición anterior no depende del punto P fijado.

Proposición Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real y L un subespacio afín de $\mathbb{A}$. La terna $(L, \vec{L}, \phi)$ es un espacio afín.

Proposición Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real y L un subespacio afín de $\mathbb{A}$. Para cada punto $P \in \mathbb{A}$ y cada subespacio vectorial $W \subset V$ el conjunto

$$S(P, W) = \{X \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{PX} \in W\}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{A}$ que denotaremos $P + W$.

Definición de dimensión de un subespacio afín Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real y L un subespacio afín de $\mathbb{A}$. Se define la *dimensión* de L a la dimensión de su subespacio vectorial asociado: $\dim L = \dim \vec{L}$.

Notación Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real de dimensión n. Los subespacios de dimensión 0 son los puntos de $\mathbb{A}$. Los subespacios de dimensión $1, 2$ y $n-1$ se llaman las *rectas, planos e hiperplanos*, respectivamente.

1.3.1 Intersección y suma de subespacios afines

Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín real y L_1, L_2 dos subespacios afines de $\mathbb{A}$.

El conjunto *intersección* de L_1 y L_2:

$$L_1 \cap L_2 = \{P \mid P \in L_1 \text{ y } P \in L_2\}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{A}$. Si la intersección es no vacía; esto es, $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, entonces

$$\overrightarrow{L_1 \cap L_2} = \overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}.$$

Se define la *suma* de L_1 y L_2 como el menor subespacio afín que contiene a L_1 y a L_2 y se denota $L_1 + L_2$. Si $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ entonces

$$L_1 + L_2 = P_1 + \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2}).$$

Observación Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces

$$\overrightarrow{L_1 + L_2} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2},$$

y si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ entonces

$$\overrightarrow{L_1 + L_2} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2}), \ P_1 \in L_1, \ P_2 \in L_2.$$

Dos subespacios afines $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ se *cortan* si y sólo si

$$\overrightarrow{P_1P_2} \in \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}.$$

1.3.2 Paralelismo

Decimos que dos subespacios afines $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ de un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ son *paralelos* si $\overrightarrow{L_1} \subset \overrightarrow{L_2}$ ó $\overrightarrow{L_2} \subset \overrightarrow{L_1}$.

Se dice que dos subespacios afines $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ se *cruzan* si ni son paralelos ni se cortan.

1.3.3 Fórmulas de la dimensión

Sean $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ dos subespacios afines de un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$. Se cumple lo siguiente:

1. Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

2. Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, entonces

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}) + 1.$$

Demostración Claramente,

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(\overrightarrow{L_1 + L_2}) = \dim(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2})).$$

Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces $\overrightarrow{L_1 + L_2} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\dim(L_1 + L_2) &= \dim(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}) \\
&= \dim \overrightarrow{L_1} + \dim \overrightarrow{L_2} - \dim(\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}) \\
&= \dim \overrightarrow{L_1} + \dim \overrightarrow{L_2} - \dim(\overrightarrow{L_1 \cap L_2}) \\
&= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).
\end{aligned}$$

Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ entonces $\overrightarrow{P_1P_2} \notin \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}$ (por tanto, $(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}) \cap \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \emptyset$)

$$\begin{aligned}
\dim(L_1 + L_2) &= \dim(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2})) \\
&= \dim(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}) + \dim(\mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2})) - \dim((\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}) \cap \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2})) \\
&= \dim(\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}) + 1 \\
&= \dim \overrightarrow{L_1} + \dim \overrightarrow{L_2} - \dim(\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}) + 1 \\
&= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}) + 1.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Posiciones relativas de dos rectas afines. Sean $L_1 = P_1 + \overrightarrow{L_1}$ y $L_2 = P_2 + \overrightarrow{L_2}$ dos rectas afines en un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ de dimensión n. Las posibles posiciones relativas de L_1 y L_2 son:

Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces o $L_1 \cap L_2$ es una recta y entonces $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$ ó $L_1 \cap L_2$ es un punto y entonces $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$. Se tiene:

$$\begin{array}{lcl}
\dim(L_1 + L_2) & = & \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) \\
L_1 \text{ y } L_2 \text{ son } \textit{coincidentes} & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 + 1 - 1 \\ 2 = 1 + 1 - 0 \end{array} \right. \\
L_1 \text{ y } L_2 \text{ son } \textit{secantes} & &
\end{array}$$

Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ entonces $\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}$ puede o ser una recta vectorial o ser el vector nulo $\vec{0}$. Se tiene:

$$\begin{array}{lcl}
\dim(L_1 + L_2) & = & \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(\overrightarrow{L_1} \cap \overrightarrow{L_2}) + 1 \\
L_1 \text{ y } L_2 \text{ son } \textit{paralelas} & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2 = 1 + 1 - 1 + 1 \\ 3 = 1 + 1 - 0 + 1 \end{array} \right. \\
L_1 \text{ y } L_2 \text{ se } \textit{cruzan} & &
\end{array}$$

Definición Sean $L_1 = P_1 + \mathcal{L}(\vec{u}_1)$ y $L_2 = P_2 + \mathcal{L}(\vec{u}_2)$ dos rectas afines en un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \phi)$ de dimensión n. Se dice que:

1. Las rectas L_1 y L_2 se *cruzan* si no hay un plano que contenga a ambas; esto es, si el sistema de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2}\}$ es linealmente independiente.

2. Las rectas L_1 y L_2 son *coplanarias* si no se cruzan; esto es, si el sistema de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2}\}$ es linealmente dependiente.

3. Las rectas L_1 y L_2 se *cortan* si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

4. Las rectas L_1 y L_2 son *paralelas* si $\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2}$; esto es, si $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son proporcionales. Si además $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entonces las dos rectas son *coincidentes.*

1.3.4 Ecuaciones de un subespacio afín

Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B\}$, $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Y sea $L \subset \mathbb{A}$ un subespacio afín de $\mathbb{A}$ de dimensión k; esto es, $L = P + \overrightarrow{L}$ con $\overrightarrow{L} = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\})$ y $P(a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$ y

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{n1}) \\ \vec{u}_2 = (a_{12}, \ldots, a_{n2}) \\ \qquad \vdots \\ \vec{u}_k = (a_{1k}, \ldots, a_{nk}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{u}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\ \qquad \vdots \\ \vec{u}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nk}\vec{e}_n \end{array}\right.$$

Ecuaciones paramétricas Un punto $X(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}} \in L$ si y sólo si el vector

$$\overrightarrow{PX} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \in \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}).$$

Por tanto, $X(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}} \in L$ si y sólo existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\overrightarrow{PX} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k;$$

esto es,

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = \lambda_1(a_{11}, \ldots, a_{n1}) + \cdots + \lambda_k(a_{1k}, \ldots, a_{nk})$$

o, equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_k a_{1k} \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_k a_{nk} \end{array}\right.$$

que son las *ecuaciones paramétricas* del subespacio L.

Ecuaciones cartesianas Como estamos suponiendo que los vectores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ son linealmente independientes (si no lo fueran, quitariamos los vectores que se pueden escribir como combinación lineal del resto) tenemos que

$$\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = k.$$

Por tanto, $\overrightarrow{PX} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \in \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\})$ si y sólo si

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = k.$$

Al imponer que dicho rango sea k obtenemos $n - k$ menores de orden $k + 1$ que deben anularse. Esto es, obtenemos las $n - k$ *ecuaciones cartesianas* de L.

Observación Sean

$$L \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{nr}x_n = b_r \end{cases}$$

las ecuaciones cartesianas de un subespacio afín L de dimensión $n - r$. Nótese que las *ecuaciones cartesianas* de un subespacio afín L de dimensión $n - r$ es un sistema de r ecuaciones lineales no homogéneas. Si $P, Q \in L$ entonces el vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ satisface las ecuaciones del sistema lineal homogéneo asociado a L.

Demostración Sean $P(p_1, \dots, p_n)_{\mathcal{R}}$, $Q(q_1, \dots, q_n)_{\mathcal{R}} \in L$ veamos que entonces

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$$

es solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{nr}x_n = 0 \end{cases}$$

Para $i = 1 \dots r$ cualquiera, se tiene

$$\begin{aligned} a_{1i}(p_1 - q_1) + \cdots + a_{ni}(p_n - q_n) &= (a_{1i}p_1 + \cdots + a_{ni}p_n) - (a_{1i}q_1 + \cdots + a_{ni}q_n) \\ \underset{P,Q \in L}{=} b_i - b_i &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones del sistema vectorial asociado a L son:

$$\vec{L} \equiv \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{nr}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Ecuaciones de una recta Una recta afín $r \subset \mathbb{A}$ es un subespacio afín de dimensión 1; esto es, $r = P + \mathcal{L}(\vec{u})$ con

$$P(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}} \quad \text{y} \quad \vec{u} = u_1\vec{e}_1 + \cdots + u_n\vec{e}_n.$$

Un punto $X \in r$ si y sólo

$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u},$$

esto es, si $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de X en la referencia $\mathcal{R}$ entonces,

$$(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \lambda(u_1, \dots, u_n)$$

o, equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = a_1 + \lambda_1 u_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 u_n \end{array} \right.$$

que son las *ecuaciones paramétricas* de la recta r.

Si suponemos $u_1 \neq 0$ (algún u_i no se anula pues el vector $\vec{u}$ no es nulo), el sistema anterior se escribe:

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{u_n}$$

que son la *ecuación en forma continua* de la recta r.

Por último, $X(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in r$ si y sólo si $\overrightarrow{XP} \in \mathcal{L}(\vec{u}) \iff \overrightarrow{XP}$ y $\vec{u}$ son proporcionales. Por tanto, $\overrightarrow{XP} \in \mathcal{L}(\vec{u})$ si y sólo si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n - a_n & u_n \end{pmatrix} = 1.$$

Al imponer que dicho rango sea 1 obtenemos $n - 1$ menores de orden 2 que deben anularse. Esto es, obtenemos $n - 1$ *ecuaciones cartesianas* de r.

Ecuación cartesiana Un hiperplano afín $H \subset \mathbb{A}$ es un subespacio afín de dimensión $n-1$; por tanto viene dado por una única *ecuación cartesiana*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Un subespacio afín L de dimensión k es la intersección de $n-k$ hiperplanos independientes cada hiperplano viene dado por una ecuación lineal y L viene dado por un sistema de $n-k$ ecauciones lineales).

Posición relativa de subespacios El estudio de los sistemas de ecuaciones de dos subespacios permite estudiar de manera sencilla la posición relativa de dichos subespacios. Vamos a estudiar dos casos particularmente sencillos:

I. Posición relativa de dos hiperplanos Sean $H_1, H_2 \subset \mathbb{A}$ dos hiperplanos de ecuaciones cartesianas:

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \\ H_2 &\equiv a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de sus respectivos espacios vectoriales asociados son

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &\equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ \vec{H}_2 &\equiv a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, si existe λ tal que $(a'_1, \ldots, a'_n) = \lambda\,(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$ y los hiperplanos H_1, H_2 son paralelos.

Si además, $b' = \lambda b$ entonces los hiperplanos H_1, H_2 son coincidentes.

Si $b' \neq \lambda b$ entonces los hiperplanos H_1, H_2 no se cortan ($H_1 \cap H_2 = \emptyset$).

II. Posición relativa de recta e hiperplano Sea $r = P + \mathcal{L}(\vec{u})$ una recta afín en $\mathbb{A}$ con $P(a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$ y $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Y sea H un hiperplano afín con ecuación cartesiana

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La recta r y el hiperplano H son paralelos si el vector $\vec{u} \in \vec{H}$; esto es, si $(u_1, \ldots, u_n)$ satisface la ecuación lineal homogénea del subespacio vectorial $\vec{H}$; es decir, si

$$a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0.$$

Ejemplo 1 Obtener ecuaciones paramétricas del subespacio afín L de $\mathbb{A}$ que tiene respecto de cierta referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$L \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Primer camino Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo que define L. Tomando $x_3 = \lambda$ pues

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de L.

Segundo camino Como $\dim L = 3 - \text{rg}(A) = 3 - 2 = 1$, L es una recta. Para determinarla basta dar un punto $P \in L$ y un vector que genere el subespacio vectorial $\vec{L}$. Un punto $P \in L$ debe satisfacer las ecuaciones del sistema que define L; por ejemplo, $P(3, 0, -1)_{\mathcal{R}}$.

Un vector que genere el subespacio vectorial $\vec{L}$ es una solución no trivial del sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, el vector $\vec{u} = (-5, 1, 2)_B$.

Luego, $X(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}} \in L$ si y sólo si $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, -1) + \lambda(-5, 1, 2)$; esto es, si

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

que también son ecuaciones paramétricas de L.

Ejemplo 2 Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B\}$, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Obtener ecuaciones cartesianas del subespacio afín $L = P + \vec{L}$, donde $P(1, 2, -1)_{\mathcal{R}}$ y $\vec{L} = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ con $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$ y $\vec{u}_2 = (2, 1, 1)$.

Solución Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ que generan $\vec{L}$ son linealmente independientes. Por tanto, $\dim L = 2$.

Un punto $X(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}} \in L$ si y sólo si el vector

$$\overrightarrow{PX} = (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 + 1) \in \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\});$$

esto es, si y sólo si

$$\text{rg}\begin{pmatrix} x_1 - 1 & 1 & 2 \\ x_2 - 2 & 2 & 1 \\ x_3 + 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 2 \\ x_2 - 2 & 2 & 1 \\ x_3 + 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3x_1 - 3x_2 - 3x_3.$$

Por tanto $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ es la ecuación cartesiana de L.

MAPLE

```
>restart: with(linalg):
>X:=[x1,x2,x3];
>P:=[1,2,-1]; u1:=[1,2,-1]; u2:=[2,1,1];
>A:=concat(evalm(X-P),u1,u2);
>0=det(A);
```

Ejemplo 3 Se consideran las rectas r y s que que tienen respecto de cierta referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ las siguientes ecuaciones cartesianas respectivamente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{cases}$$

Hallar la condición que deben cumplir los parámetros p y q para que las rectas r y s sean coplanarias. Determinar p y q para que dicho plano contenga al punto $P(1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$.

Solución Unas ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + p \\ y = -\lambda + 3 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = 2\lambda + q \\ z = \lambda \end{cases}$$

luego un vector director de la recta r es $\vec{u} = (2, -1, 1)_B$ y un punto de r es $R(p, 3, 0)_{\mathcal{R}}$ y un vector director de la recta s es $\vec{w} = (-1, 2, 1)_B$ y un punto de s

es $S(1,q,0)_{\mathcal{R}}$. Las rectas r y s son coplanarias si $\left\{\vec{u},\vec{w},\overrightarrow{RS}=(1-p,q-3,0)\right\}$ es linealmente dependiente; esto es, si

$$0=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1-p \\ -1 & 2 & q-3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3p-3q+6$$

Por tanto, r y s son coplanarias si $p-q+2=0$. El plano que las contiene es: $\pi \equiv R+\mathcal{L}\left(\{\vec{u},\vec{w}\}\right)$. Luego un punto $X(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \pi$ si y sólo si $\overrightarrow{RX} \in \mathcal{L}\left(\{\vec{u},\vec{w}\}\right)$; esto es, si

$$0=\begin{vmatrix} x-p & 2 & -1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=3p-3x-3y+3z+9.$$

Imponemos ahora que $P(1,1,1)_{\mathcal{R}} \in \pi$:

$$0=3p-3\cdot 1-3\cdot 1+3\cdot 1+9=3p+6,$$

luego $p=-2$ y $q=p+2=0$.

Cuestiones teóricas Demostrar las siguientes cuestiones teóricas:

1. Sean L, S dos subespacios afines de un espacio afín $\mathbb{A}$ y tales que son paralelos y $P \in S \cap L$. Demostrar:

   (a) Si $\dim L < \dim S$, entonces $L \subset S$.

   (b) Si $\dim L = \dim S$, entonces $L = S$.

2. Sean L, S dos subespacios afines de un espacio afín $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ y tales que $\vec{L}$ y $\vec{S}$ son subespacios vectoriales complementarios (esto es, $\vec{L} \oplus \vec{S} = V$) entonces $L \cap S$ consiste en un punto (esto es, $\dim(L \cap S) = 0$).

Solución.

1. Como L y S son paralelos y estamos suponiendo $\dim L \leq \dim S$ entonces $\vec{L} \subset \vec{S}$. Por tanto, $L = P + \vec{L} \subseteq P + \vec{S}$. Luego $L \subseteq S$. Si además $\dim L = \dim S$, entonces $L = S$.

2. Calculamos la dimensión de la intersección $L \cap S$. Como $\vec{L} \oplus \vec{S} = V$ entonces

$$\overrightarrow{S+L}=\vec{L}+\vec{S}+\mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})=V+\mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})=V,\text{ con } P \in L \text{ y } Q \in S.$$

$$\begin{aligned}\dim(L+S) &= \dim\left(\overrightarrow{L+S}\right) = n \\ &= \dim \vec{L} + \dim \vec{S} - \dim(\vec{L}\cap\vec{S}) \\ &= \dim L + \dim S\end{aligned}$$

por tanto, $\dim(L\cap S) = \dim(L+S) - \dim L - \dim S = 0.$

2 Aplicaciones afines

2.1 Definición y primeras propiedades

Definición Sean $(\mathbb{A}, V, \phi)$ y $(\mathbb{A}', V', \phi')$ dos espacios afines reales. Diremos que una aplicación

$$f\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$$

es una *aplicación afín* si existe una aplicación lineal $\bar{f}\colon V \longrightarrow V'$ tal que:

$$\bar{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}, \quad \forall P, Q \in \mathbb{A}.$$

Lo anterior equivale a decir que para todo $P \in \mathbb{A}$ y todo vector $\vec{u} \in V$ se tiene

$$f(P + \vec{u}) = f(P) + \bar{f}(\vec{u}).$$

A la aplicación lineal $\bar{f}$ que cumple lo anterior la llamamos *aplicación lineal asociada* a f.

Proposición Sean $(\mathbb{A}, V, \phi)$ y $(\mathbb{A}', V', \phi')$ dos espacios afines y sea $f\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\bar{f}\colon V \longrightarrow V'$ se cumple lo siguiente:

1. f es inyectiva si y sólo si $\bar{f}$ es inyectiva.

2. f es sobreyectiva si y sólo si $\bar{f}$ es sobreyectiva.

3. f es biyectiva si y sólo si $\bar{f}$ es biyectiva.

Demostración

1. Supongamos que f es inyectiva. Veamos que $\bar{f}$ es inyectiva (equivalentemente $\ker \bar{f} = \{\vec{0}\}$). Sea $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \in \ker \bar{f}$, entonces

   $$\vec{0} = \bar{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} \text{ luego } f(A) = f(B)$$

   y como estamos suponiendo que f es inyectiva $A = B$. Luego $\vec{u} = \vec{0}$ y $\bar{f}$ es inyectiva.

   Supongamos ahora que $\bar{f}$ es inyectiva. Entonces,

   $$f(A) = f(B) \Longrightarrow \vec{0} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \bar{f}(\overrightarrow{AB}) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \in \ker \bar{f} = \{\vec{0}\} \Longrightarrow A = B.$$

2. Supongamos que f es sobreyectiva. Sea $\vec{u} = \overrightarrow{CD} \in V'$. Como f es sobreyectiva existen $A, B \in \mathbb{A}$ tales que $f(A) = C$ y $f(B) = D$. Entonces, $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \bar{f}(\overrightarrow{AB})$ luego $\bar{f}$ es sobreyectiva pues existe el vector $\overrightarrow{AB} \in V$ con $\bar{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{u}$.

   Supongamos ahora que $\bar{f}$ es sobreyectiva. Sea $C \in \mathbb{A}'$, consideremos un vector $\vec{u} = \overrightarrow{f(A)C}$ donde A es un punto arbitrario de $\mathbb{A}$. Como $\bar{f}$ es sobreyectiva existe un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \in V$ con $\bar{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{u}$ entonces

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \bar{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{u} = \overrightarrow{f(A)C}$$

   luego $f(B) = C$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Proposición Sean $g\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ y $f\colon \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}''$ dos aplicaciones afines la composición $f \circ g\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}''$ es también una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$.

Demostración Dados $P, Q \in \mathbb{A}$, se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(f \circ g)(P)(f \circ g)(Q)} &= \overrightarrow{f(g(P))f(g(Q))} \underset{\bar{f} \text{ es afín}}{=} \bar{f}\left(\overrightarrow{g(P)g(Q)}\right) \\ \underset{\bar{g} \text{ es afín}}{=} \bar{f}\left(\bar{g}(\overrightarrow{PQ})\right) &= \left(\bar{f} \circ \bar{g}\right)(\overrightarrow{PQ}). \end{aligned}$$

Proposición Sean $f, g\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ dos aplicaciones afines que coinciden sobre un punto P, $f(P) = g(P)$, y que tienen la misma aplicación lineal asociada $\bar{f} = \bar{g}$. Entonces $f = g$.

Demostración Para todo $X \in \mathbb{A}$, se cumple:

$$\overrightarrow{f(P)f(X)} = \bar{f}(\overrightarrow{PX}) = \bar{g}(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{g(P)g(X)} = \overrightarrow{f(P)g(X)},$$

por tanto, $f(X) = g(X)$.

2.2 Matriz asociada a una aplicación afín

Sean $(\mathbb{A}, V, \phi)$ y $(\mathbb{A}', V', \phi')$ dos espacios afines y sea $f\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\bar{f}\colon V \longrightarrow V'$. Se consideran referencias

afines $\mathcal{R} = \{O; B\}$, $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ y $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$, $B' = (\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_m)$ de los espacios $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ respectivamente. Se sabe:

$$\overrightarrow{O'f(O)} = b_1\vec{e}'_1 + \cdots + b_m\vec{e}'_m,$$
$$\begin{cases} \bar{f}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}'_1 + \cdots + a_{m1}\vec{e}'_m \\ \vdots \\ \bar{f}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}'_1 + \cdots + a_{mn}\vec{e}'_m \end{cases}$$

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ y sea $f(P) \in \mathbb{A}'$ con $f(P)(y_1, \ldots, y_m)_{\mathcal{R}'}$ entonces se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Escribiremos

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{b} & M_{BB'}(\bar{f}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $\vec{b}$ son las coordenadas de $f(O)$ en la referencia $\mathcal{R}'$ y $M_{BB'}(\bar{f})$ es la matriz asociada a la aplicación lineal $\bar{f}$ tomando en V la base B y en V' la base B'.

Ejemplo 1 Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\}$, y sea $(\mathbb{A}', V', \phi')$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R}' = \{O'; B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)\}$. ¿Es la aplicación $f\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$, $f(x, y, z) = (x - 2y + 5, x - z + 1)$ una aplicación afín? Dar su aplicación lineal asociada y obtener la matriz asociada a f en las referencias $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$.

Solución.

Para ver si f es una aplicación afín tenemos que ver si existe una aplicación lineal $\bar{f}\colon V \longrightarrow V'$ tal que $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \bar{f}(\overrightarrow{PQ})$ para todo par de puntos $P, Q \in \mathbb{A}$. Tomamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ entonces $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ y

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(P)f(Q)} &= f(Q) - f(P) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) \\ &= (x_2 - 2y_2 + 5, x_2 - z_2 + 1) - (x_1 - 2y_1 + 5, x_1 - z_1 + 1) \\ &= ((x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1), (x_2 - x_1) - (z_2 - z_1)) \\ &= \bar{f}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \end{aligned}$$

por tanto, f sí es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es $\bar{f}\,(x, y, z) = (x-2y, x-z)$.

Las coordenadas del origen O en la referencia $\mathcal{R}$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OO} = (0,0,0)$ en la base B y $\vec{e}_1 = (1,0,0)_B$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)_B$ y $\vec{e}_3 = (0,0,1)_B$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(O) &= f(0,0,0) = (5,1), \\ \bar{f}(\vec{e}_1) &= \bar{f}(1,0,0) = (1,1), \\ \bar{f}(\vec{e}_2) &= \bar{f}(0,1,0) = (-2,0), \\ \bar{f}(\vec{e}_3) &= \bar{f}(0,0,1) = (0,-1). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

MAPLE

```
>restart:  with(linalg):
>f:=(x,y,z)->[x-2*y+5,x-z+1];
>f_lineal:=(x,y,z)->[x-2*y,x-z];
>f(0,0,0);
>f_lineal(1,0,0);
>f_lineal(0,1,0);
>f_lineal(0,0,1);
>Mf[RRp]:=stackmatrix(<1,0,0,0>,
concat(f(0,0,0),
f_lineal(1,0,0),f_lineal(0,1,0),f_lineal(0,0,1));
```

Ejemplo 2 Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$, y sea $(\mathbb{A}', V', \phi')$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R}' = \{O'; B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)\}$. Determinar la aplicación afín $f\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$, tal que

$$\begin{aligned} f(1,2) &= (1,2,3), \\ \bar{f}(\vec{e}_1) &= \vec{e}'_1 + 4\vec{e}'_2, \\ \bar{f}(\vec{e}_2) &= \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Hallar la matriz asociada a f en las referencias $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$.

Solución Como sabemos el valor de f sobre el punto $P(1,2)$ y conocemos la aplicación lineal asociada a f, tenemos determinada f. Sabemos que

$$\begin{aligned} \bar{f}(1,0) &= (1,4,0)_{B'}, \\ \bar{f}(0,1) &= (1,-1,1)_{B'}, \end{aligned}$$

Para calcular la matriz asociada a f necesitamos saber $f(O)$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(O)f(P)} \underset{f \text{ es afín}}{=} \bar{f}(\overrightarrow{OP}) &= \bar{f}(1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \underset{\bar{f} \text{ es lineal}}{=} \bar{f}(\vec{e}_1) + 2\bar{f}(\vec{e}_2) \\ &= (1,4,0) + 2(1,-1,1) = (3,2,2) \end{aligned}$$

luego

$$f(O) = f(P) - \bar{f}(\overrightarrow{OP}) = (1,2,3) - (3,2,2) = (-2,0,1).$$

Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 + x_2 - 2 \\ 4x_1 - x_2 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 2, 4x_1 - x_2, x_2 + 1).$$

MAPLE

```
> restart: with(linalg):
> OP:=[1,2];
> M_f_lineal:=concat([1,4,0],[1,-1,1]);
> evalm(M_f_lineal&*[1,2]);
> evalm([1,2,3]-[3,2,2]);
> M_f:=stackmatrix(<1,0,0>,
concat([-2, 0, 1],[1,4,0],[1,-1,1]));
> evalm(M_f&*[1,x1,x2]);
```

Ejemplo 3 Sea $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \phi)$ un espacio afín con sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; B\}$, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Determinar la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(1,1) = (7,5),\ f(1,2) = (11,4),\ f(2,1) = (8,8).$$

Para dar una aplicación afín $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ necesitamos tres puntos que sean referencia afín y sus transformados.

Primer camino Llamo $P_0(1,1)$, $P_1(1,2)$ y $P_2(2,1)$. Tenemos $\overrightarrow{P_0P_1} = (0,1)$ y $\overrightarrow{P_0P_2} = (1,0)$, entonces sabemos que

$$\begin{aligned} \bar{f}(\vec{e}_1) &= \bar{f}(1,0) = \bar{f}(\overrightarrow{P_0P_2}) = f(P_2) - f(P_0) = (1,3), \\ \bar{f}(\vec{e}_2) &= \bar{f}(0,1) = \bar{f}(\overrightarrow{P_0P_1}) = f(P_1) - f(P_0) = (4,-1). \end{aligned}$$

Y como $\overrightarrow{OP_0} = (1,1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ tenemos:

$$\bar{f}(\overrightarrow{OP_0}) = \bar{f}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \bar{f}(\vec{e}_1) + \bar{f}(\vec{e}_2) = (1,3) + (4,-1) = (5,2)$$

luego

$$f(O) = f(P_0) - \bar{f}(\overrightarrow{OP_0}) = (7,5) - (5,2) = (2,3).$$

Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y $f(x_1,x_2) = (2 + x_1 + 4x_2,\ 3 + 3x_1 - x_2)$.

Segundo camino El conjunto de puntos $\mathcal{R}' = \{P_0(1,1), P_1(1,2), P_2(2,1)\}$ es una referencia afín pues $\overrightarrow{P_0P_1} = (0,1)$ y $\overrightarrow{P_0P_2} = (1,0)$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Y tenemos:

$$\begin{aligned} f(P_0) &= f(1,1) = (7,5), \\ \bar{f}(\overrightarrow{P_0P_1}) &= \overrightarrow{f(P_0)f(P_1)} = f(P_1) - f(P_0) = (11,4) - (7,5) = (4,-1), \\ \bar{f}(\overrightarrow{P_0P_2}) &= \overrightarrow{f(P_0)f(P_2)} = f(P_2) - f(P_0) = (8,8) - (7,5) = (1,3). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como nosotros queremos calcular $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f)$, vamos a hacer un cambio de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f)(M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x_1,x_2) = (2 + x_1 + 4x_2, 3 + 3x_1 - x_2)$.

MAPLE

```
>restart:  with(linalg):
>P0:=[1,1]; P1:=[1,2]; P2:=[2,1];
>Q0:=[7,5]; Q1:=[11,4]; Q2:=[8,8];
>M[RpR]:=stackmatrix(<1,0,0>, concat(P0,P1-P0,P2-P0));
>det(M[RpR]);
>M[RRp]:=inverse(M[RpR]);
>Mf[RpR]:=stackmatrix(<1,0,0>, concat(Q0,Q1-Q0,Q2-Q0));
>Mf[RR]:=evalm(Mf[RpR]&*M[RRp]);
>X:=matrix(3,1,[1,x,y]);
>evalm(Mf[RR]&*X);
```

Comprobar que el resultado obtenido es correcto (**Pista:** evaluar la expresión de f obtenida en los puntos dados en el enunciado).

Ejemplo 4 Determinar la aplicación afín $f\colon \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ que tansforma los puntos $P_0(0,0,0)$, $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,1,1)$ y $P_3(1,1,4)$ en los puntos $Q_0(2,0,2)$, $Q_1(2,-1,1)$, $Q_2(2,1,3)$ y $Q_3(5,7,6)$ respectivamente.

Solución Para dar una aplicación afín $f\colon \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ necesitamos cuatro puntos que sean referencia afín y sus transformados.

El conjunto de puntos $\mathcal{R}' = \{P_0(0,0,0), P_1(0,1,0), P_2(1,1,1), P_3(1,1,4)\}$ es una referencia afín pues $\overrightarrow{P_0P_1} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{P_0P_3} = (1,1,4)$ es una base de $\mathbb{R}^3$ pues $\operatorname{rg}(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) = 3$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f(P_0) &= Q_0 = (2,0,2),\\
\bar{f}(\overrightarrow{P_0P_1}) &= \overrightarrow{f(P_0)f(P_1)} = f(P_1) - f(P_0) = Q_1 - Q_0 = (0,-1,-1),\\
\bar{f}(\overrightarrow{P_0P_2}) &= \overrightarrow{f(P_0)f(P_2)} = f(P_2) - f(P_0) = Q_2 - Q_0 = (0,1,1),\\
\bar{f}(\overrightarrow{P_0P_3}) &= \overrightarrow{f(P_0)f(P_3)} = f(P_3) - f(P_0) = Q_3 - Q_0 = (3,7,4).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como nosotros queremos calcular $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f)$, vamos a hacer un cambio de refer-

encia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f)M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f)(M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x_1, x_2, x_3) = (2 - x_1 + x_3,\ \ - x_2 + 2x_3,\ 2 + x_1 - x_2 + x_3)$.

MAPLE

```
> restart:  with(linalg):
> P0:=[0,0,0]; P1:=[0,1,0]; P2:=[1,1,1]; P3:=[1,1,4];
> Q0:=[2,0,2]; Q1:=[2,-1,1]; Q2:=[2,1,3]; Q3:=[5,7,6];
> M[RpR]:=stackmatrix(<1,0,0,0>,
concat(P0,P1-P0,P2-P0,P3-P0));
> det(M[RpR]);
> M[RRp]:=inverse(M[RpR]);
> Mf[RpR]:=stackmatrix(<1,0,0,0>,
concat(Q0,Q1-Q0,Q2-Q0,Q3-Q0));
> Mf[RR]:=evalm(Mf[RpR]&*M[RRp]);
> evalm(Mf[RR]&*[1,x,y,z]);
```

Comprobar que el resultado obtenido es correcto.

2.3 Subespacios afines invariantes

Proposición Sean $(\mathbb{A}, V, \phi)$ y $(\mathbb{A}', V', \phi')$ dos espacios afines y sea $f\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\bar{f}\colon V \longrightarrow V'$. Se cumple lo siguiente:

1. Si $L \subset \mathbb{A}$ es un subespacio afín de $\mathbb{A}$ entonces

$$f(L) = \{P' \in \mathbb{A}' \mid \text{existe } P \in L \text{ tal que } f(P) = P'\}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{A}'$.

2. Si $L' \subset \mathbb{A}'$ es un subespacio afín de $\mathbb{A}'$ entonces el conjunto

$$L = \{P \in \mathbb{A} \mid f(P) \in L'\}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{A}$.

Definición Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín y f una transformación afín de $\mathbb{A}$. Diremos que un punto $P \in \mathbb{A}$ es un *punto fijo de* f si $f(P) = P$.

Proposición Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín y f una transformación afín de $\mathbb{A}$. El conjunto de puntos fijos de f; esto es,

$$F = \{X \in \mathbb{A} \mid f(X) = X\}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{A}$ con subespacio vectorial asociado el subespacio de V de autovectores de $\bar{f}$ asociados al autovalor $\lambda = 1$.

Demostración. Sea $\bar{f}$ la aplicación lineal asociada a f. Sabemos que el conjunto $V(\lambda)$ de autovectores de $\bar{f}$ asociados a un autovalor λ es un subespacio vectorial de V.

Veamos que, fijado $P \in F$, el conjunto

$$\mathcal{W}(F) = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in F\}$$

coincide con $V(1)$; esto es, $\mathcal{W}(F) = V(1)$, y, por tanto, es un subespacio vectorial de V.

1. Veamos que $\mathcal{W}(F) \subset V(1)$: Tomamos $\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{W}(F)$ y veamos que $\overrightarrow{PQ} \in V(1)$. Como $\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{W}(F)$ entonces $\bar{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}$ pues P y Q son puntos fijos de f. Por tanto, $\overrightarrow{PQ} \in V(1)$.

2. Veamos que $V(1) \subset \mathcal{W}(F)$: Tomamos $\vec{u} \in V(1)$ y veamos que $\vec{u} \in \mathcal{W}(F)$. Dado $\vec{u} \in V(1)$ sabemos que existe $R \in \mathbb{A}$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PR}$. Se tiene:

$$\overrightarrow{PR} = \vec{u} = \bar{f}(\vec{u}) = \bar{f}(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \overrightarrow{Pf(R)}$$

por tanto $f(R) = R$. Luego R es un punto fijo y $\vec{u} \in \mathcal{W}(F)$.

Estrategia para buscar los puntos fijos Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín, f una transformación afín de $\mathbb{A}$ y $\mathcal{R} = \{O; B\}$ un sistema de referencia de $\mathbb{A}$. Sea

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{b} & A \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a f donde A es la matriz asociada a la aplicación lineal $\bar{f}$ en la base B.

Si P es un punto fijo se cumple:

$$P = f(P) = f(O + \overrightarrow{OP}) = f(O) + \bar{f}(\overrightarrow{OP}) = \vec{b} + A \cdot \overrightarrow{OP}$$

o equivalentemente,

$$\boxed{\vec{0} = (A - I)\,\overrightarrow{OP} + \vec{b}}$$

que es la ecuación que deben satisfacer los puntos fijos de f. Esto es,

$$F = \left\{X \in \mathbb{A} \mid (A - I)\,\overrightarrow{OX} + \vec{b} = \vec{0}\right\}.$$

Ejemplo Hallar los puntos fijos de la transformación afín $f(x, y) = (-2y + 1, x + 3y - 1)$.

Solución La matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada a la aplicación lineal $\bar{f}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El subespacio de puntos fijos de f es

$$F = \left\{X \in \mathbb{A} \mid (A - I)\,\overrightarrow{OX} + \vec{b} = \vec{0}\right\};$$

esto es, como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x + 2y - 1 = 0,$$

se tiene: $F = \{(x, y) \in \mathbb{A} \mid x + 2y - 1 = 0\}$.

Definición Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín, f una transformación afín de $\mathbb{A}$ y S un subespacio afín de $\mathbb{A}$. Diremos que S es un *subespacio afín invariante de f* si $f(S) \subset S$.

Observación Sea f una transformación afín de $\mathbb{A}$ con aplicación lineal asociada $\bar{f}\colon V \longrightarrow V$ y S un subespacio afín de $\mathbb{A}$ que contiene al punto P y cuyo espacio vectorial asociado está generado por los vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$; esto es, $S \equiv P + \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\})$. Entonces el subespacio afín $f(S)$ contiene al punto $f(P)$ y está generado por los vectores $\bar{f}(\vec{u}_1), \ldots, \bar{f}(\vec{u}_r)$; esto es,

$$f(S) = f(P) + \mathcal{L}\left(\{\bar{f}(\vec{u}_1), \ldots, \bar{f}(\vec{u}_r)\}\right).$$

Entonces S es invariante por f si y sólo si

1. $\mathcal{L}\left(\{\bar{f}(\vec{u}_1), \ldots, \bar{f}(\vec{u}_r)\}\right) \subset \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\})$
2. $\overrightarrow{Pf(P)} \in \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\})$

Caso particular: Una recta $r \equiv P + \mathcal{L}(\vec{u})$ es invariante por f si y sólo si

1. $\mathcal{L}(\bar{f}(\vec{u})) \subset \mathcal{L}(\vec{u}) \Longleftrightarrow \bar{f}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$; esto es, $\vec{u}$ es un autovector de la aplicación lineal $\bar{f}$
2. $\overrightarrow{Pf(P)} \in \mathcal{L}(\vec{u})$

Ejemplo Hallar los subespacios invariantes de la aplicación f del ejemplo anterior.

Solución Para buscar los subespacios invariantes de f calculo primero los autovalores de $\bar{f}$. El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

y, por tanto, los autovalores de A son $\lambda = 1, 2$.

Los correspondientes subespacios de autovectores de $\bar{f}$ son

$$\begin{aligned}
V(1) &= \left\{\vec{v} \mid (A - I)\vec{v} = \vec{0}\right\} \\
&= \left\{(x, y) \text{ tales que } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x, y) \text{ tales que } x + 2y = 0\} = \mathcal{L}(\{(2, -1)\}) \\
V(2) &= \left\{\vec{v} \mid (A - 2I)\vec{v} = \vec{0}\right\} \\
&= \left\{(x, y) \text{ tales que } \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x, y) \text{ tales que } x + y = 0\} = \mathcal{L}(\{(1, -1)\})
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Pf(P)} &= f(P) - P = (-2y+1, x+3y-1) - (x,y)\\ &= (-x-2y+1, x+2y-1) \in V(2)\end{aligned}$$

pues las componentes del vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ satisfacen la ecuación de $V(2)$.

Por tanto, las rectas cuyo espacio vectorial asociado es $V(2) = \mathcal{L}(\{(1,-1)\})$ son rectas invariantes de f pues

$$\begin{aligned}\bar{f}(1,-1) &= 2(1,-1)\\ \overrightarrow{Pf(P)} &\in V(2)\end{aligned}$$

Si $x+2y-1=0$ (es la recta de puntos fijos de f) entonces $\overrightarrow{Pf(P)} = \vec{0} \in V(1)$. La recta de puntos fijos, es en particular, una recta invariante de f.

Ejercicio Sea un espacio afín $(\mathbb{A}_3, V, \phi)$ y $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un sistema de referencia en $\mathbb{A}_3$. Determinar la transformación afín f de $\mathbb{A}_3$ tal que el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 1$ es un plano de puntos fijos de f y el vector $\vec{e}_1$ es un autovector de $\bar{f}$ asociado al autovalor 3.

Solución Para determinar f necesitamos la imagen por f de una referencia afín de $\mathbb{A}$. Como el plano π es un plano de puntos fijos, cualquier punto del plano es un punto fijo de f. Por ejemplo, el punto $P(1,0,0) \in \pi$ es un punto fijo de f; esto es, $f(P) = P$. También sabemos que los vectores del subespacio vectorial asociado a π, esto es, los vectores del plano $\vec{\pi} \equiv x + 2y - z = 0$, son autovectores asociados al autovalor 1. Por ejemplo para

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{u} = (1,0,1) \in \vec{\pi}\\ \vec{v} = (0,1,2) \in \vec{\pi}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\bar{f}(\vec{u}) = \vec{u} = (1,0,1) \in \vec{\pi}\\ \bar{f}(\vec{v}) = \vec{v} = (0,1,2) \in \vec{\pi}\end{array}\right.$$

y, también sabemos que $\bar{f}(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1$; esto es, $\bar{f}(1,0,0) = 3(1,0,0)$.

Como $B' = (\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{v})$ es una base de V, consideramos la referencia $\mathcal{R} = \{P; B'\}$. Se tiene:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f)(M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}})^{-1}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Comprobación. Obviamente $\bar{f}(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1$ y también se cumple:

$$\begin{aligned}
f(P) &= f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \\
\bar{f}(\vec{u}) &= \bar{f}(1,0,1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u} \\
\bar{f}(\vec{v}) &= \bar{f}(1,0,1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{v}.
\end{aligned}$$

2.4 Algunos ejemplos de transformaciones

Sea $(\mathbb{A}, V, \phi)$ un espacio afín y sea f una transformación afín de $\mathbb{A}$ con aplicación lineal asociada $\bar{f}$ y sea $M_{\mathcal{R}}(f)$ la matriz asociada a f respecto de cierta referencia $\mathcal{R}$.

2.4.1 Traslaciones

Dado un vector $\vec{v} \in V$, se define la *traslación de vector* $\vec{v}$ como la transformación afín $T_{\vec{v}}$ de $\mathbb{A}$ tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \vec{v}$, para todo $P \in \mathbb{A}$.

Proposición Toda traslación $T_{\vec{v}}$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad.

Demostración Para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{A}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\vec{T}_{\vec{v}}\left(\overrightarrow{PQ}\right) &= \overrightarrow{T_{\vec{v}}(P)T_{\vec{v}}(Q)} = \overrightarrow{T_{\vec{v}}(P)P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT_{\vec{v}}(Q)} \\
&= -\vec{v} + \overrightarrow{PQ} + \vec{v} = \overrightarrow{PQ}.
\end{aligned}$$

Luego $\vec{T}_{\vec{v}} = Id$.

2.4.2 Proyecciones

Una transformación afín f de $\mathbb{A}$ se dice que es una *proyección* si $f^2 = f$. Por tanto, si f es una proyección $M_{\mathcal{R}}(f)$ es idempotente $(M_{\mathcal{R}}(f)^2 = M_{\mathcal{R}}(f))$.

La aplicación lineal asociada a una proyección es idempotente: $\bar{f}^2 = \bar{f}$.

Observación El conjunto de puntos fijos de una proyección f es el subespacio afín $\operatorname{Im} f$.

2.4.3 Homotecias

Una transformación afín f de $\mathbb{A}$ se dice que es una *homotecia de razón* r si $\bar{f} = rI_V$.

Observación Una homotecia de razón r tiene un único punto fijo C llamado *centro de la homotecia.* Se tiene:

$$\bar{f}(\overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{f(C)f(P)} = \overrightarrow{Cf(P)} = r\overrightarrow{CP}$$

luego

$$\boxed{f(P) = C + r\overrightarrow{CP}.}$$

Cálculo del centro de una homotecia Sea $C \in \mathbb{A}$ el centro de una homotecia f. Se tiene:

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)C} = \overrightarrow{Pf(P)} + r\overrightarrow{PC} \Longrightarrow (1-r)\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{Pf(P)}.$$

Por tanto, el punto fijo C cumple

$$C = P + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{Pf(P)}.$$

Ejemplo 1 Estudiar si la aplicación afín $f(x,y,z) = (1+\frac{2}{3}x, -1+\frac{2}{3}y, 2+\frac{2}{3}z)$ tiene algún punto fijo o algún subespacio invariante.

Solución La matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada a la aplicación lineal $\bar{f}$ es

$$M_B(\bar{f}) = \frac{2}{3}Id.$$

Por tanto, f es una homotecia de razón $r = \frac{2}{3}$. El centro de la homotecia es:

$$C = P + \frac{1}{1-\frac{2}{3}}\overrightarrow{Pf(P)}$$

para cualquier $P \in \mathbb{A}$. Tomo $P(0,0,0)$ entonces $f(P) = f(0,0,0) = (1,-1,2)$ y $\overrightarrow{Pf(P)} = f(P) - P = (1,-1,2)$, por tanto

$$C = \frac{3}{3-2}(1,-1,2) = (3,-3,6).$$

Los subespacios invariantes de f son:

- El centro $C(3,-3,6)$ pues es un punto fijo

- Las rectas que contienen al centro

- Los planos que contienen al centro

Ejemplo 2 Estudiar si la aplicación afín $f(x,y,z) = (x+1, y+2, z+3)$ tiene algún punto fijo o algún subespacio invariante.

Solución La matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada a la aplicación lineal $\bar{f}$ es la identidad. Por tanto, f es una traslación de vector $\vec{v} = \overrightarrow{Of(O)} = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$. Las traslaciones no tienen puntos fijos.

Los subespacios invariantes de f son:

- Las rectas que tienen dirección la del vector de traslación; esto es, rectas de la forma $r \equiv P + \mathcal{L}(\{\vec{v}\})$.

- Los planos que tienen la dirección del vector de traslación; esto es, planos de la forma $\pi \equiv P + \mathcal{L}(\{\vec{v}, \vec{w}\})$.

Ejemplo 3 Estudiar si la aplicación afín $f(x,y,z) = (-2+2x-y, -4+2x-y, z)$ tiene algún punto fijo o algún subespacio invariante.

Solución La matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada a la aplicación lineal $\bar{f}$ es

$$A = M_B(\bar{f}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de A son $\lambda = 0$ y 1 pues:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda - 1)^2.$$

Quizás la matriz A sea idempotente pues sus autovalores son $\lambda = 0$ y 1. Se comprueba que $A^2 = A$ y por tanto, A es idempotente. Luego f es una proyección.

El subespacio de puntos fijos de f es

$$F = \left\{X \in \mathbb{A} \mid (A - I)\,\overrightarrow{OX} + \vec{b} = \vec{0}\right\};$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} 0 = x - y - 2 \\ 0 = 2x - 2y - 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Por tanto el plano $\pi \equiv x - y - 2 = 0$ es un plano de puntos fijos (cuyo espacio vectorial asociado es el autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$).

Veamos cuál es el subespacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} V(0) &= \left\{ (x,y,z) \text{ tales que } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y,z) \text{ tales que } 2x - y = 0,\ z = 0\} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Pf(P)} &= f(P)-P=(-2+2x-y,-4+2x-y,z)-(x,y,z)\\ &= (-2-x-y,-4+2x-2y,0)\in V(0)\end{aligned}$$

pues las componentes del vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ cumplen la ecuación de $V(0)$. Por tanto, las rectas cuyo espacio vectorial asociado es $V(0)=\mathcal{L}(\{(1,2,0)\})$ son rectas invariantes de f.

Los subespacios invariantes de f son:

- Las rectas con espacio vectorial asociado $V(0)=\mathcal{L}(\{(1,2,0)\})$.

- Los planos que contienen a rectas invariantes.

- El plano de puntos fijos $\pi\equiv x-y-2=0$.

- Las rectas contenidas en el plano de puntos fijos pues son rectas de puntos fijos.

Ejercicio Obtener la expresión analítica de una aplicación afín $f\colon \mathbb{A}_3\longrightarrow\mathbb{A}_3$ sabiendo que transforma el origen en el punto de coordenadas $(3,1,1)$ y el plano π de ecuación cartesiana $x_1+2x_2-x_3+1=0$ es un plano de puntos fijos.

Solución Como el plano π es un plano de puntos fijos, el plano vectorial asociado a π es un plano de autovectores asociados al autovalor $\lambda=1$ de la aplicación lineal asociada $\bar{f}$. Como $\pi\equiv P+\mathcal{L}(\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\})$ con $P(0,0,1)$, $\vec{u}_1=(1,0,1)$, $\vec{u}_2=(0,1,2)$ pues $P\in\pi$ (esto es, las coordenadas de P son solución de la ecuación de π) y los vectores $\vec{u}_1$,$\vec{u}_2\in\vec{\pi}$ (sus respectivas coordenadas son solución de la ecuación homogenénea asociada: $x_1+2x_2-x_3=0$).

Por tanto, sabemos:

$$\begin{aligned}f(0,0,0) &= (3,1,1)\\ f(0,0,1) &= (0,0,1)\\ \bar{f}(\vec{u}_1) &= \vec{u}_1\Longrightarrow \bar{f}(1,0,1)=(1,0,1)\\ \bar{f}(\vec{u}_2) &= \vec{u}_2\Longrightarrow \bar{f}(0,1,2)=(0,1,2)\end{aligned}$$

De las dos primeras condiciones obtenemos

$$\bar{f}(\overrightarrow{OP})=f(P)-f(O)=(0,0,1)-(3,1,1)=(-3,-1,0).$$

Por tanto, considerando la referencia $\mathcal{R}' = \left\{P; \overrightarrow{OP}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right\}$ (nótese que $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ son linealmente independientes), obtenemos:

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Y como

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) &= M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(f) \cdot M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego la expresión analítica de f es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (6 + 4x_1 + 6x_2 - 3x_3, 2 + x_1 + 3x_2 - x_3, 1 + x_1 + 2x_2).$$

3 Bibliografía

1. M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra lineal y Geometría*, Ed. Reverté, 1994.

2. J. de Burgos, *Curso de Álgebra y Geometría*, Ed. Alhambra, 1980.

3. A. de la Villa, *Problemas de Álgebra con esquemas teóricos*, Ed. CLAGSA, 1994.

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

300.01

cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

